

Exercices – Séquence n° 6 – FONCTIONS (II) : compléments dérivation, convexité, point d'inflexion

Contenus	- Relation $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ pour la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables. - Dérivée seconde d'une fonction. - Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes. Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f', la positivité de f''. - Point d'inflexion.
Capacités	- Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition. - Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence. - Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction. - Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée des tableaux de variations de f, de f' ou de f''. - Lire sur une représentation graphique de f, de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. - Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER**Exercice 1 [Ch-Ra-Co]**Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Justifier que la fonction u^2 est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
- Justifier que la fonction u^3 est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
- Conjecturer l'expression de la dérivée sur I de u^n où n est entier naturel non-nul.
- Démontrer la conjecture.

Exercice 2 [Ra-Ca-Co]

Après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité, déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto \sqrt{7x^2 + 3x + 1}$
- $g : x \mapsto (2x + 3)\sqrt{x^2 - 4}$
- $h : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$
- $k : x \mapsto \left(\frac{3-x}{3+x^2}\right)^2$
- $l : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-2}}$
- $m : x \mapsto \sqrt{e^{-x} - 1}$

Exercice 3 [Ra-Ca-Co]

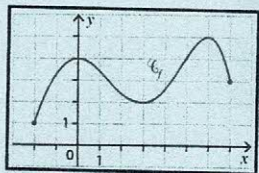
Après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité, déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

- $p : x \mapsto \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$
- $q : x \mapsto (3e^{-x} + 4)^5$
- $r : x \mapsto (x^2 + 5)e^{x^2-1}$
- $s : x \mapsto \frac{1}{(e^{-x^2} + 4)^3}$

Exercice 4 [Re-Co]

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-2; 7]$ dont la représentation graphique C_f est donnée dans le repère orthonormé ci-contre.

Conjecturer la convexité de f et les éventuels points d'inflexion de C_f .

**Exercice 5** [Re-Co]

Voici le tableau de variations de la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3; 7]$.

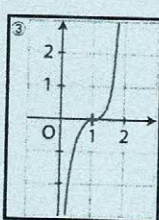
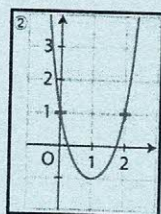
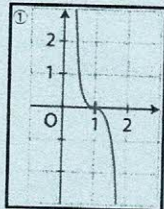
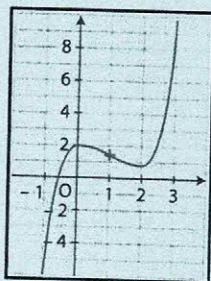
- Donner la convexité de la fonction f .
- Sachant que $f(-1) = f(3) = 1$, tracer, dans un repère, une courbe pouvant représenter la fonction f .

x	-3	-1	3	7
$f'(x)$	2	-1	2	-1

Exercice 6 [Re-Co]

Dans le repère ci-contre, on donne la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-1; 3]$.

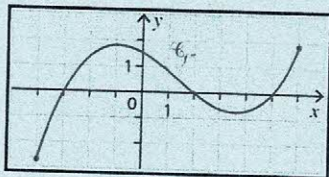
- À l'aide du graphique, donner la convexité de f .
- En déduire les variations de sa fonction dérivée f' .
- Parmi les trois courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f ? Expliquer.

**Exercice 7** [Re-Co]

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4; 6]$.

La représentation graphique $C_{f''}$ de sa dérivée f'' est donnée ci-contre.

- À l'aide du graphique, donner la convexité de f .
- Sachant que $f(-3) = 2$, $f(2) = 4$ et $f(5) = 6$, tracer, dans un repère, une courbe qui pourrait être celle de f .



Exercice 8 [Ch-Ra-Ca-Co]

Le tableau suivant donne l'évolution du revenu disponible brut des ménages entre 2010 et 2016 :

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6
Revenu disponible brut	1 258,4	1 311,4	1 318,3	1 321,9	1 338,5	1 353,3	1 377,0

Source : Insee, comptes nationaux – base 2010.

Une estimation du revenu disponible brut est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par :

$$f(x) = 0,82x^3 - 9,19x^2 + 41,98x + 1\,253,5$$

Ainsi, $f(0)$ estime le revenu brut disponible des ménages en 2010.

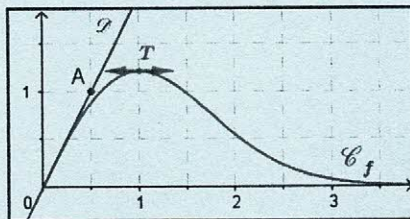
- 1) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 9]$.
- 2) Le rythme de croissance instantané du revenu disponible brut est assimilé à la dérivée de la fonction f .
Au cours de quelle année, ce rythme de croissance a-t-il commencé à augmenter ? Justifier.

Exercice 9 [Ra-Ca-Co]

On donne ci-contre la courbe C_f représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$. La droite D est la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0 ; elle passe par le point $A(0,5; 1)$ et par l'origine du repère. La tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie A : Lectures graphiques et conjecture

- 1) Déterminer, graphiquement, une équation de la droite D .
- 2) Lire graphiquement la valeur de $f'(1)$. Expliquer.
- 3) À l'aide du graphique, proposer un intervalle sur lequel la fonction f semble concave.

**Partie B : Étude d'une fonction**

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 2xe^{-0,5x^2}$

- 4) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 5) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations
- 6) Étudier la convexité de f .

Partie C : Application

En Europe, les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation considèrent qu'ils peuvent modéliser par cette fonction f l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver.

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 3]$, $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimés en milliers, à l'instant x , exprimé en mois.

- 7) Un journal affirme que, cet hiver, le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million.
Que dire de cette affirmation ?

Exercice 10 [Ch-Ra-Ca-Co]

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1+x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

- 1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la position relative de la courbe C_f et de la droite d d'équation :
 $y = \frac{1}{2}x + 1$.
- 2) Démontrer la conjecture.

Exercice 11 [Ra-Ca-Co]

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Calcul formel	
1	$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$
●	$\rightarrow f(x) := x + \sqrt{x^2 + 1}$
2	Simplifier(Dérivée(Dérivée(f(x)))) $\rightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2}$

- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer, pour tout réel x , $f'(x)$.
- Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis retrouver le résultat obtenu à la ligne 2 par le logiciel de calcul formel ci-contre.
- En déduire le signe de f'' sur $\mathbb{R}$ et donc la convexité de f puis les variations de f' .
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$.
- Déduire des questions 4) et 5) le signe de f' puis les variations de f .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
- Quelle est la position relative de la courbe C_f et sa tangente T au point d'abscisse 0 ? Justifier.
- Soit D la droite d'équation $y = 2x$.
 - Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$. Comment interpréter graphiquement le résultat ?
 - Justifier que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 2x$. Comment interpréter graphiquement le résultat ?
- Tracer, dans un repère orthonormé du plan, les droites T et D puis la courbe C_f .

Exercice 12 [Ch-Re-Ra-Ca-Co] ANTILLES-GUYANE JUIN 2019**- Partie A -**

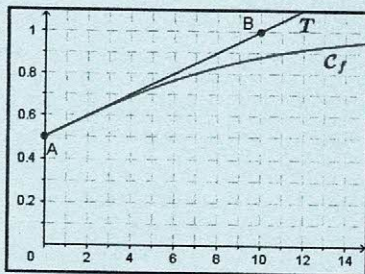
Soient a et b deux nombres réels.

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-bx}}$$

On donne, dans le repère ci-contre, la courbe C_f représentant la fonction f qui passe par le point $A(0; 0,5)$ ainsi que sa tangente au point A , nommée T , qui passe par le point $B(10; 1)$.

- Justifier que $a = 1$. Ainsi, pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}}$.
- Justifier que f est dérivable sur $[0; +\infty[$ puis montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$.
- En utilisant les données de l'énoncé, déterminer la valeur de b .

**- Partie B -**

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0.2x}}$$

où x représente le temps écoulé, en années, depuis le 1^{er} janvier 2010 et $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1^{er} janvier 2010 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2013.

- Quelle est, pour ce modèle, la proportion, arrondie au centième, d'individus équipés au 1^{er} janvier 2020 ?
- Étudier les variations de la fonction p sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé. Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle le marché devient saturé.
- Alice affirme que la croissance de la proportion d'individus qui possèdent ce type d'équipement ne fait que ralentir. Que penser de cette affirmation ? Justifier.

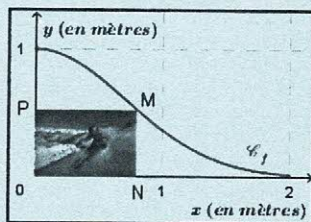
Exercice 13 [Ch-Ra-Ca-Co]

Une entreprise est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski. Le panneau est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre.

Le profil de cette piste est modélisé, dans le repère orthonormé ci-contre, par la courbe représentative C_f de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire ONMP est insérée sur le panneau publicitaire ; M est un point de C_f , le point N appartient à l'axe des abscisses et P appartient à l'axe des ordonnées.



- Déterminer la position du point M sur la courbe C_f pour laquelle l'aire du rectangle MNOP est maximale et donner la valeur exacte puis arrondie, à 10^{-2} mètre carré près, de cette aire maximale.
- Cette position du point M correspond-elle à l'endroit de la piste modélisée par la courbe C_f à partir duquel la pente de cette piste diminue ? Justifier.

Exercice 14 [Ch-Ra-Ca-Co]

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x+1}$

- Justifier que l'intervalle $[0; +\infty[$ est stable par f c'est-à-dire que $f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$ ou encore que pour tout $x \in [0; +\infty[: f(x) \geq 0$.
- Soit n un entier naturel non-nul. Exprimer $\underbrace{(f \circ f \circ f \dots \circ f)}_{n \text{ fois } f}(x)$ en fonction de x et de n .

Pour aller plus loin

Exercice 15 [Ra-Ca-Co]

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$

- Démontrer que, pour tout réel x , on a : $1 \leq g(x) < 2$.
- En déduire un encadrement, pour tout réel x , de $(g \circ f)(x)$.
- Expliciter, pour tout réel x , l'expression de $(g \circ f)(x)$.
- Démontrer que, pour tout réel x , $-2 \leq (f \circ g)(x) < 1$.

Exercice 16 [Ra-Ca-Co]

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par : $f(x) = (x+5)e^{\frac{1}{x-1}}$

- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Justifier que f est dérivable sur I puis montrer que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}$.
- En déduire les variations de f sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
- On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan et Δ la droite d'équation $y = x + 5$. Étudier la position relative de C_f et Δ .

Exercice 17 [Mo-Ra-Ca-Co]

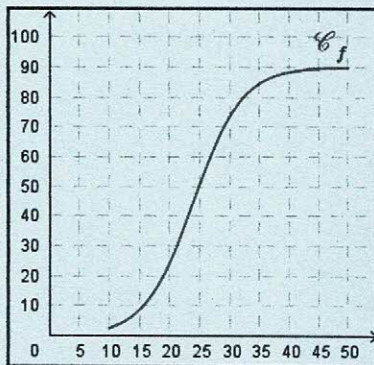
On appelle fonction « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend des valeurs comprises entre 0 et 100. Lorsque la fonction « satisfaction » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « saturation ».

On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ».

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « satisfaction » f est définie sur l'intervalle $[10; 50]$ par :

$$f(x) = \frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}} \quad \text{où } x \text{ est exprimé en milliers d'euros.}$$

La courbe représentative C_f de la fonction f est donnée dans le repère ci-contre.



- 1) Par lecture graphique, conjecturer la convexité de la fonction f ainsi que le sens de variations de la fonction « envie ». Interpréter concrètement le résultat.
- 2) D'après ce modèle, serait-il possible d'atteindre la saturation ? Justifier.
- 3) Justifier le résultat obtenu à la ligne 2 par le logiciel de calcul formel.
- 4) En déduire la convexité de f .
- 5) À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ? Justifier.

Calcul formel	
1	$f(x) := 90 / (1 + \exp(-0.25 \cdot x + 6))$ $\rightarrow f(x) := \frac{90}{e^{-\frac{1}{4}x+6} + 1}$
2	FactoriseCl(Dérivée(Dérivée(f(x)))) $\rightarrow 45 e^{-\frac{1}{4}x+6} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{4}x+6} - 1}{8 (e^{-\frac{1}{4}x+6} + 1)^3}$

Pour réviser**EXERCICES DU MANUEL :**

- Exercices 58, 61, 62, 64, 65, 72, 80, 86, 88, 113 pages 155 à 160.